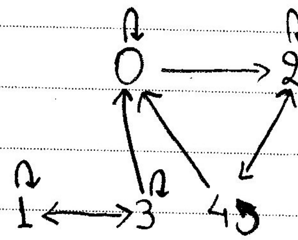
Πα

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$



$0 \leftrightarrow 2$
$0 \leftrightarrow 4$
$2 \leftrightarrow 4$
$1 \to 0$
$0 \not\to 1$
$3 \to 0$
$0 \not\to 3$

άρα $\{0,2,4\}$ αποτελούν κλειστό κύκλωμα
$0 \not\to 3$ άρα είναι διαχωρίσιμη η αλυσίδα
Η 1 και η 3 είναι παροδική

<u>Απόδειξη</u>

Έστω 1 και 3 επαναληπτικές άρα από θεώρημα θα έπρεπε αφού $1 \to 0$ και η $3 \to 0$ να ισχύει $0 \to 1$ και $0 \to 3$ Άτοπο

$\pi_1 = \pi_3 = 0$
0, 2, 4 είναι θετικώς επαναληπτικές

Θεώρημα Foster

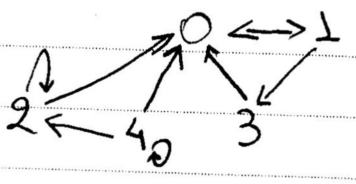
Σε μια μη διαχωρίσιμη εργοδική (θετ. επαναλ. και απεριοδική) Μαρκοβ. Αλυσίδα $\exists$ το διάνυσμα των οριακών πιθανοτήτων $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ και ικανοποιεί τη σχέση $\underset{\sim}{\pi} = \underset{\sim}{\pi} P$. Αν επιπλέον $X = (X_0, X_1, X_2, \dots)$ είναι λύση της $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X} P$ με $\Sigma |X_i| < +\infty$ το P είναι πολλαπλάσιο του X τότε $\underset{\sim}{\pi} = p \underset{\sim}{X}$: $\sum_{i=0} \pi_i = 1$

Αντίστροφα: Μια μη διαχ. Μαρκ. Αλυσίδα είναι θετ. επαναλ. όταν $\exists x$: $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X} P$ με (i) όχι όλα τα $X_i = 0$
(ii) $\Sigma |\tilde{X}_i| < +\infty$

Απεριοδική Μαρκ. Αλυσίδα είναι αυτή που έχει περίοδο 1, δηλ. ο ΜΚΔ των περιόδων των καταστάσεών της είναι 1

__Ασκ__ (3.18 | Σελ. 77)

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$



Έστω 2(4) επαναλ.

$2(4) \to 0$ τότε θα έπρεπε $0 \to 2(4)$ δεν ισχύει άτοπο

άρα 2 κ 4 παροδικές

Για τις παροδικές ξέρω ότι $\pi_2 = \pi_4 = 0$

$\{0, 1, 3\}$ αποτελούν κλειστό κύκλωμα ορίζοντας στην ουσία έναν νέο πίνακα μετάβασης και είναι μία μη διαχωρίσιμη Μαρκ. Αλυσίδα, πεπερασμένου πλήθους καταστάσεων άρα είναι θετικώς επαναληπτικές

Άρα ο P θα γίνει
$$
\begin{array}{c|c}
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} & P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Περίοδος του 0: $0 \to 1 \rightleftarrows 0$, $\quad 1 \to 3 \to 0$

$\text{ΜΚΔ}\{\{2,3\}\} = 1$

Εφόσον είναι 1 της 0 ότι και να είναι τα υπόλοιπα η Μαρκ. Αλυσίδα έχει περίοδο 1 $\Rightarrow$ έχω απεριοδική Μαρκ. Αλυσ

$$
(\pi_0 \ \ \pi_1 \ \ \pi_3) = (\pi_0 \ \ \pi_1 \ \ \pi_3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \pi_0 &= \pi_1 \tfrac{1}{4} + \pi_3 \\ \pi_1 &= \pi_0 \\ \pi_3 &= \pi_1 \tfrac{3}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow
$$

$$
\left\{ \begin{aligned} & \pi_0 + \pi_1 + \pi_3 = 1 \\ & \pi_1 + \pi_1 + \tfrac{3}{4}\pi_1 = 1 \Rightarrow \\ & \tfrac{11}{4}\pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \tfrac{4}{11} \end{aligned} \right. \qquad \begin{aligned} \pi_1 &= \pi_0 \\ \pi_3 &= \tfrac{2}{3}\pi_1 \end{aligned}
$$

άρα $(\pi_0, \pi_1, \pi_3) = \left(\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, \frac{3}{11}\right)$

$(\mu_0, \mu_1, \mu_3) = \left(\frac{11}{4}, \frac{11}{4}, \frac{11}{3}\right)$ (δες παρατήρηση στη συνέχεια)

Παρατήρηση

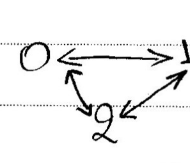
Είναι γνωστό ότι όταν η j είναι επαναληπτική και απεριοδική, τότε $\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$ και $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{F_{ij}(1)}{\mu_j}$

Όταν η αλυσίδα είναι μη διαχωρίσιμη τότε $\Pi_j = \frac{1}{\mu_j}$

Ασκ. 3.10.9

ΜΠΑΧ = 0
ΕΥΡΩΠΗ = 1
ΧΑΒΑΗ = 2

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



⇒ μη διαχωρίσιμη

X_n: η στοχ. διαδ. που περιγράφει πού έκανε διακοπές το n-οστό καλοκαίρι

$S = \{0, 1, 2\}$

Το μέλλον εξαρτάται από το παρόν και ο πίνακας είναι ίδιος για όλες τις χρον. στιγμές άρα είναι στατική ή ομογενής.
Είναι μη διαχωρ. αλυσίδα με πεπερ. πλήθος καταστάσεων άρα οι καταστάσεις είναι θετ. επαναληπτικές
Η περίοδος του 1 είναι $d_1 = 1$
Η περίοδος της Μαρκ. Αλυσ. είναι ο ΜΚΔ$\{d_0, 1, d_2\} = 1$

$$(\Pi_0 \ \Pi_1 \ \Pi_2) = (\Pi_0 \ \Pi_1 \ \Pi_2)\begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Pi_0 = \frac{3}{8}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_2 \\ \Pi_1 = \frac{2}{3}\Pi_0 + \frac{1}{8}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_2 \\ \Pi_2 = 1/3 \cdot \Pi_0 + 1/2 \cdot \Pi_1 \end{cases}$$

$\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 = 1.$ $\quad \Pi_2 = \frac{3}{4}\Pi_1$

άρα $\quad \Pi_0 = \frac{3}{4}\Pi_1 = \Pi_2$

$\frac{3}{4}\Pi_1 + \Pi_1 + \frac{3}{4}\Pi_1 = 1 \Rightarrow \Pi_1 = \frac{4}{10}$

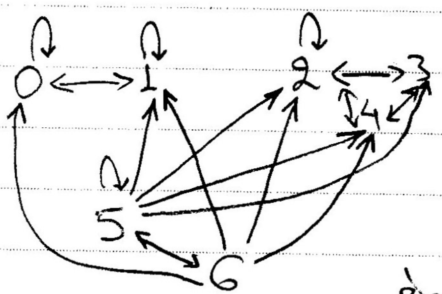
$\Pi_0 = \frac{3}{10}$ και $\Pi_2 = \frac{3}{10}$

Φέτος στην Ευρώπη. $\mu_1 = ?$ να ξαναέρθει Ευρώπη?

$\mu_1 = \frac{1}{\Pi_1} = \frac{10}{4}$

Ασκ. 3.10.7

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$



6 και 5 παροδικές
γιατί ενώ $6 \to 1$ ή $5 \to 1$
αλλά $1 \not\to 6$ ή $1 \not\to 5$
άρα $\pi_5 = \pi_6 = 0$

Οι $\{0,1\}$ είναι κλειστό κύκλωμα επαναλ. καταστάσεων
άρα είναι θετικώς επαναληπτικές

Οι $\{2,3,4\}$ είναι κλ. κύκλωμα επικοινωνούν των καταστάσεων
άρα είναι θετ. επαναλ.

$$P_1 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{με} \quad (\pi_0 \ \pi_1) = (\pi_0 \ \pi_1)\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\text{άρα} \left\{ \begin{array}{l} \pi_0 = \pi_0 \cdot 0{,}2 + \pi_1 \cdot 0{,}8 \\ \pi_1 = \pi_0 \cdot 0{,}8 + \pi_1 \cdot 0{,}3 \end{array} \right\} \Rightarrow (\pi_0, \pi_1) = \left(\frac{7}{15}, \frac{8}{15} \right)$$

Ξέρουμε: $\pi_0 + \pi_1 = 1$

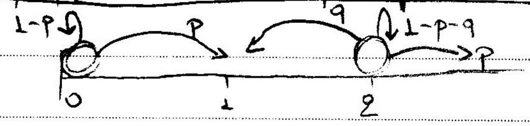
$$P_2 = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{με} \quad (\pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4) = (\pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4) P_2$$

$$\pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

Βγαίνει $\pi_2 = \frac{6}{23}$ $\quad \pi_3 = \frac{7}{23}$ $\quad \pi_4 = \frac{10}{23}$

$$\Rightarrow (\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4 \ \pi_5 \ \pi_6) = \Big(\underbrace{\frac{7}{15}, \frac{8}{15}, \frac{6}{23}, \frac{7}{23}, \frac{10}{23}}_{\text{Αθροίζουν στο 2}}, 0, 0 \Big)$$

Άσκηση (Πίνακας Μετάβασης στοχ. διαδ. με 1 φρ. ανάκλασης στο 0)



$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & \dots & \\ \hline 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 \\ 1 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 \\ 2 & 0 & q & 1-q-p & p & 0 \\ 3 & 0 & 0 & q & 1-q-p & p \\ 4 & \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \end{array}$$

$$0 \longleftrightarrow 1 \longleftrightarrow 2 \longleftrightarrow 3 \; \dots\dots$$

Άρα όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους

Θα χρησιμοποιήσω το αντίστροφο του Θεωρ. Foster.

Λύνω το σύστημα: $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X} P$

$(X_0 \; X_1 \; X_2 \quad) = (X_0 \; X_1 \; X_2 \dots) P$

$X_0 = X_0(1-p) + X_1 q \Rightarrow p X_0 = q X_1 \Rightarrow X_1 = \frac{p}{q} X_0$

$X_1 = p X_0 + (1-p-q) X_1 + q X_2 \Rightarrow X_1 = q X_0 + (1-p-q) X_1 + q X_2 \Rightarrow p X_1 = q X_2$

$X_1 = \frac{p}{q} X_0$

$p X_1 = q X_2 \Rightarrow X_2 = \frac{p}{q} X_1 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 X_0$

Επαγωγικά: $X_n = \left(\frac{p}{q}\right)^n X_0 \quad , n = 0, 1, 2, \dots$

άρα $\underset{\sim}{X} = \left(X_0, \left(\frac{p}{q}\right) X_0, \left(\frac{p}{q}\right)^2 X_0, \dots\right)$

Αν $X_0 \neq 0$ τότε $\exists X$ με όλα τα $X_i \neq 0$

Θέλω $\sum_{k=0}^{\infty} X_0 \left(\frac{p}{q}\right)^k < +\infty$

άρα συγκλίνει αν $\frac{p}{q} < 1$

Άρα θα είναι θετικώς επαναλ. (και απεριοδική) $\Rightarrow$ Εργοδική αν $\frac{p}{q} < 1$

Όταν $\frac{p}{q} \geq 1 \Rightarrow$ είναι αφανώς επαναλ. ή απεριοδική τότε οι οριακές πιθανότητες είναι 0

Έστω όνταν $\underset{\sim}{x}$ τις λύση:

Έστω $x_0 = 1$

$\underset{\sim}{x} = \left(1, \frac{p}{q}, \left(\frac{p}{q}\right)^2, \dots\right)$

$\underset{\sim}{\Pi} = c\left(1, \frac{p}{q}, \left(\frac{p}{q}\right)^2, \dots\right)$ με $\sum \Pi_i = 1$

$c\left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \dots\right] = 1 \Rightarrow c \sum_{i=0}^{\infty} (p/q)^i = 1$

$$c = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^i} = \frac{1}{p/q}$$

Άρα $\Pi_i = (1 - p/q)(p/q)^i$

Εύρεση Οριακών Πιθανοτήτων για τη στοχ. διαδ. του συστήματος εξυπηρέτησης με αφίξεις Poisson λ και εξυπηρετήσεις εκθετικές με παράμετρο μ

$$P = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \\ & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \\ & & \beta_0 & \beta_1 & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

$\beta_k = \frac{(\mu\lambda)^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}} = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}$ όπου $p = \frac{\lambda}{\mu}$

Μη διαχωρ. (απεριοδική) ($d_i = 1$) δεν είναι πεπερ. $\Rightarrow$ χρησιμοποιώ Θ. Foster

$\beta_k = P$ (k αφίξεις κατά τη διάρκεια μιας εξυπηρέτησης)

Λύνω το σύστημα $X = XP$

$x_0 = x_0\beta_0 + x_1\beta_0 \Rightarrow x_0(1-\beta_0) = x_1\beta_0 \overset{k=0}{\Longrightarrow} x_0\left(1 - \frac{1}{1+p}\right) = x_1\frac{1}{1+p}$

$\Rightarrow x_1 = p x_0$

$x_1 = x_0\beta_1 + x_1\beta_1 + x_2\beta_0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_1}{p}\beta_1 + x_1\beta_1 + x_2\beta_0 \Rightarrow$

$x_1\left(1 - \frac{\beta_1}{p} - \beta_1\right) = x_2\beta_0 \overset{k=1}{\Longrightarrow} x_2 = p x_1 = p^2 x_0$

Επαγωγικά: $x_n = p^n x_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Λύση: $(x_0, p x_0, p^2 x_0, \dots)$

$\sum_{k=0}^{\infty} x_0 p^k < +\infty$ αν $p<1$ δηλ. $\lambda/\mu < 1$ τότε συγκλίνει.

$\Rightarrow$ θετικώς επαναληπτική για $x_0 \neq 0$

Για $p \geq 1$ δεν υπάρχει λύση που να ικανοποιεί το αντίθετο του Θεωρ. Foster $\Rightarrow$ ορ. πιθανότητες : 0

Λύση: $x_0(1, p, p^2, \dots)$

$\Pi = cX$ με $\sum \Pi_i = 1$ με $\Pi = c(1, p, p^2, \dots)$

$c\sum_{k=0}^{\infty} p^k = 1 \Rightarrow c = (1-p) \Rightarrow \Pi_i = (1-p)p^i$